Cryptographie à base de réseaux euclidiens

Katharina Boudgoust
EMSEC

Univ Rennes 1, CNRS, IRISA

3 septembre 2020

A look on the map - or où me trouver ?

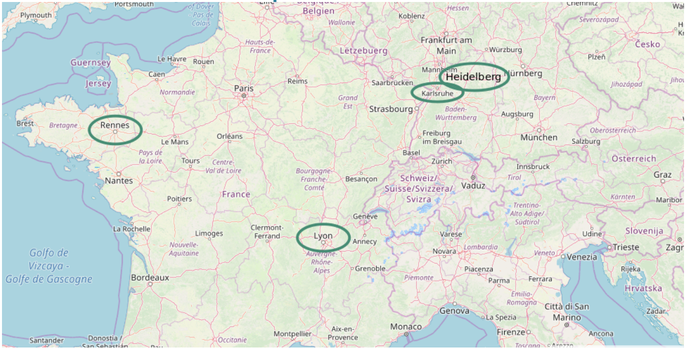
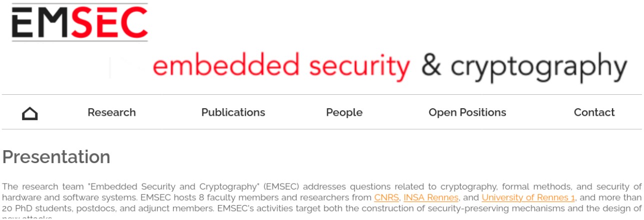
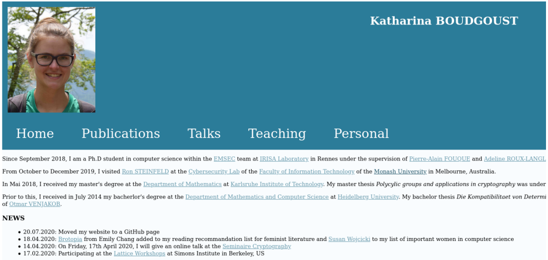


Image: Open Street Map Screen Shot

Pour savoir plus ...





`https://www.irisa.fr/emsec/`
`https://katinkabou.github.io/`

De quoi parlera cette présentation ?

1. C'est quoi la cryptographie ?
2. C'est quoi un réseau euclidien ?
3. Ça veut dire quoi "baser la cryptographie sur quelque chose" ?

De quoi parlera cette présentation ?

1. C'est quoi la cryptographie ?
   - Définition
   - Symétrique
   - Asymétrique
2. C'est quoi un réseau euclidien ?
3. Ça veut dire quoi "baser la cryptographie sur quelque chose" ?

Définition

Le mot **cryptographie** se compose des mots en grec ancien kryptos ($\kappa\rho\nu\pi\tau\omega\varsigma$, caché) et graphein ($\gamma\rho\alpha\phi\varepsilon\iota\nu$, écrire).

Définition

Le mot **cryptographie** se compose des mots en grec ancien kryptos ($\kappa\rho\upsilon\pi\tau\omega\varsigma$, caché) et graphein ($\gamma\rho\alpha\phi\varepsilon\iota\nu$, écrire).

Elle a pour objet de protéger des messages en assurant leurs

- **confidentialité**,
- **authenticité** et
- **intégrité**.

Définition

Le mot **cryptographie** se compose des mots en grec ancien kryptos ($\kappa\rho\upsilon\pi\tau\omega\varsigma$, caché) et graphein ($\gamma\rho\alpha\phi\varepsilon\iota\nu$, écrire).

Elle a pour objet de protéger des messages en assurant leurs

- **confidentialité**,
- **authenticité** et
- **intégrité**.

Science (publique) très jeune : née dans les années 1970, avec les publications de Merkle [Mer78], Diffie et Hellman [DH76].

Définition

Le mot **cryptographie** se compose des mots en grec ancien kryptos ($\kappa\rho\upsilon\pi\tau\omega\varsigma$, caché) et graphein ($\gamma\rho\alpha\phi\varepsilon\iota\nu$, écrire).

Elle a pour objet de protéger des messages en assurant leurs

- **confidentialité**,
- **authenticité** et
- **intégrité**.

Science (publique) très jeune : née dans les années 1970, avec les publications de Merkle [Mer78], Diffie et Hellman [DH76].

Fondation de l'IACR (International Association for Cryptologic Research) en 1982.

La cryptographie symétrique

Images: `https://svgsilh.com/de/ffc107/image/1473654.html`

La cryptographie symétrique

clé secrète k

message m

clé secrète k

$$c = \mathrm{Enc}(m, k)$$

$$\longrightarrow$$

$$m' = \mathrm{Dec}(c, k)$$

message chiffré c

si tout va bien $m = m'$

Images: `https://svgsilh.com/de/ffc107/image/1473654.html`

Le chiffre de César

Le chiffre de César

Chiffrement par **décalage**. Chaque lettre est décalée par k, où k est une lettre de l'alphabète.

Clé: A $\rightarrow$ pas de décalage

`A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z`

devient

`A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z`

Texte en clair: `INTRODUCTION`
Texte chiffré: `INTRODUCTION`

Le chiffre de César

Le chiffre de César

Chiffrement par **décalage**. Chaque lettre est décalée par k, où k est une lettre de l'alphabète.

Clé: B $\to$ décalage par une position

`A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z`

devient

`B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A`

Texte en clair: `INTRODUCTION`
Texte chiffré: `JOUSPEVDUJPO`

Le chiffre de César

Le chiffre de César

Chiffrement par **décalage**. Chaque lettre est décalée par k, où k est une lettre de l'alphabète.

Clé: U $\rightarrow$ décalage par 20 positions

`A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z`

devient

`U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T`

Texte en clair: `INTRODUCTION`
Texte chiffré: `CHNLIXOWNCIH`

Le chiffre de César

Le chiffre de César

Chiffrement par **décalage**. Chaque lettre est décalée par k, où k est une lettre de l'alphabète.

Clé: U $\rightarrow$ décalage par 20 positions

`A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z`

devient

`U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T`

Texte en clair: `INTRODUCTION`
Texte chiffré: `CHNLIXOWNCIH`

Casser par **brute-force** ($\hat{=}$ essayer toutes les 26 possibilités)

La cryptographie asymétrique

La cryptographie asymétrique

message m

clé secrète sk

clé publique pk

$$\xrightarrow{\quad c = \mathrm{Enc}(m, \mathrm{pk}) \quad}$$

$$m' = \mathrm{Dec}(c, \mathrm{sk})$$

message chiffré c

si tout va bien $m = m'$

La cryptographie asymétrique

message m

clé secrète sk

clé publique pk

$$c = \mathrm{Enc}(m, \mathrm{pk})$$
$$\longrightarrow$$

$$m' = \mathrm{Dec}(c, \mathrm{sk})$$

message chiffré c

si tout va bien $m = m'$

pas d'échange de clé nécessaire !

Cryptosystème de ElGamal

Paramètres: groupe cyclique $G = \langle g \rangle$ de l'ordre q ($h^q = 1 \ \forall \ h \in G$)

message $m \in G$

$r \leftarrow_{\$} \{0, \ldots, q-1\}$

$\mathsf{sk} = x \leftarrow_{\$} \{0, \ldots, q-1\}$

$\mathsf{pk} = g^x$

$$\xrightarrow{c = (c_1, c_2) = (g^r, m \cdot \mathsf{pk}^r)}$$

$m' = c_2 \cdot (c_1^x)^{-1}$

Cryptosystème de ElGamal

Paramètres: groupe cyclique $G = \langle g \rangle$ de l'ordre q ($h^q = 1 \;\forall\; h \in G$)

message $m \in G$

$r \xleftarrow{\$} \{0, \ldots, q-1\}$

$\mathrm{sk} = x \xleftarrow{\$} \{0, \ldots, q-1\}$

$\mathrm{pk} = g^x$

$$\xrightarrow{c = (c_1, c_2) = (g^r, m \cdot \mathrm{pk}^r)}$$

$m' = c_2 \cdot (c_1^x)^{-1}$

Correcte ?

$$\begin{aligned} m' &= c_2 \cdot (c_1^x)^{-1} = m \cdot \mathrm{pk}^r \cdot ((g^r)^x)^{-1} \\ &= m \cdot (g^x)^r \cdot g^{-rx} = m \cdot g^{xr} \cdot g^{-xr} = m. \end{aligned}$$

La crypto dans la vie quotidienne

Pourquoi on s'intéresse à la cryptographie ?

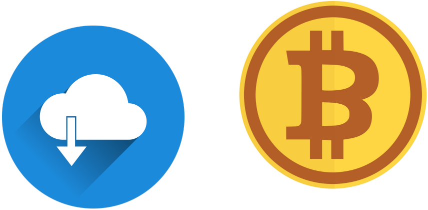
Signal, PGP, Passport européen, TLS, ...

Images: wikipedia.org et pixaby.com

La crypto dans la vie quotidienne

Pourquoi on s'intéresse à la cryptographie ?

Plus de buzz words : Clouds, Blockchain, ...



Mais retournons vers les maths :-)

Images: publicdomainpictures.net et pixaby.com

De quoi parlera cette présentation ?

1. C'est quoi la cryptographie ?
2. C'est quoi un réseau euclidien ?
   - Définition
   - Le déterminant d'un réseau
   - Problèmes difficiles
3. Ça veut dire quoi "baser la cryptographie sur quelque chose" ?

Définition réseau euclidien

Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Définition réseau euclidien

Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'exemple le plus simple: $n = 1$, $B = (1)$ et $\Lambda(B) = \mathbb{Z}$.

Définition réseau euclidien

Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'exemple le plus simple: $n = 1$, $B = (1)$ et $\Lambda(B) = \mathbb{Z}$.

Un autre exemple simple: $n = 1$, $B = (3)$ et $\Lambda(B) = 3\mathbb{Z}$.

Définition réseau euclidien

Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'exemple le plus simple: $n = 1$, $B = (1)$ et $\Lambda(B) = \mathbb{Z}$.

Un autre exemple simple: $n = 1$, $B = (3)$ et $\Lambda(B) = 3\mathbb{Z}$.

On ajoute une dimension: $n = 2$, $B = ((0, 1), (1, 0))$ et $\Lambda(B) = \mathbb{Z}^2$.

Définition réseau euclidien

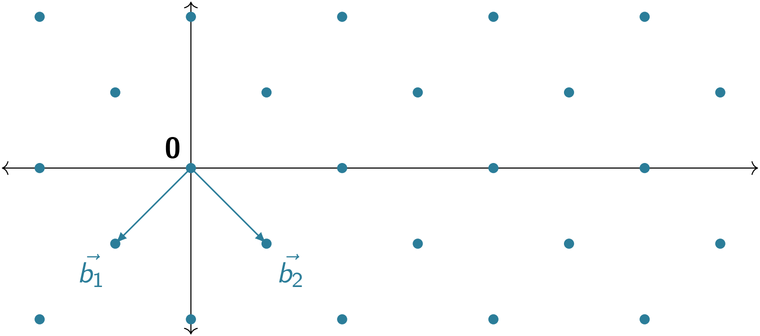
Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Définition réseau euclidien

Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

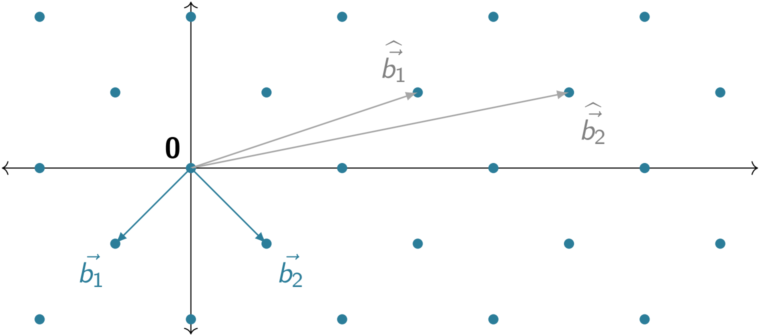
$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Définition réseau euclidien

Un **réseau euclidien** Λ de **dimension** n est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base indépendants $B = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

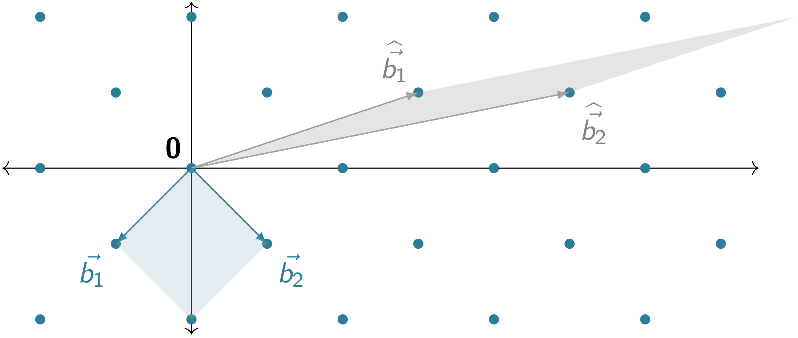
$$\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Propriétés des réseaux euclidiens

Un invariant d'un réseau euclidien $\Lambda(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ est son **déterminant**

$$\det(\Lambda) = \mathrm{vol} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b_i} \mid 0 \leq a_i < 1 \right\}.$$



Deux problèmes difficiles 1/2

Soit $\Lambda(B)$ un réseaux avec une base B. Le **minimum**[1] de $\Lambda(B)$ est défini par $\lambda_1(\Lambda(B)) = \min_{\vec{v} \in \Lambda(B) \setminus \{\vec{0}\}} \|\vec{v}\|$.

[1] Il faut fixer la norme, par ex. la norme euclidienne/norme du supremum

Deux problèmes difficiles 1/2

Soit $\Lambda(B)$ un réseaux avec une base B. Le **minimum**[1] de $\Lambda(B)$ est défini par $\lambda_1(\Lambda(B)) = \min_{\vec{v} \in \Lambda(B) \setminus \{\vec{0}\}} \|\vec{v}\|$.

Problem (Shortest Vector Problem)

Étant donnée une base B, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ non nul tel que $\lambda_1(\Lambda(B)) = \|\vec{v}\|$.

[1] Il faut fixer la norme, par ex. la norme euclidienne/norme du supremum

Deux problèmes difficiles 1/2

Soit $\Lambda(B)$ un réseaux avec une base B. Le **minimum**[1] de $\Lambda(B)$ est défini par $\lambda_1(\Lambda(B)) = \min_{\vec{v} \in \Lambda(B) \setminus \{\vec{0}\}} \|\vec{v}\|$.

Problem (Shortest Vector Problem)

Étant donnée une base B, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ non nul tel que $\lambda_1(\Lambda(B)) = \|\vec{v}\|$.

Problem (Closest Vector Problem)

Étant donnée une base B et un vecteur $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ qui minimise $\|\vec{v} - \vec{t}\|$.

[1] Il faut fixer la norme, par ex. la norme euclidienne/norme du supremum

Deux problèmes difficiles 1/2

Soit $\Lambda(B)$ un réseaux avec une base B. Le **minimum**[1] de $\Lambda(B)$ est défini par $\lambda_1(\Lambda(B)) = \min_{\vec{v}\in\Lambda(B)\setminus\{\vec{0}\}} \|\vec{v}\|$.

Problem (Shortest Vector Problem)

Étant donnée une base B, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ non nul tel que $\lambda_1(\Lambda(B)) = \|\vec{v}\|$.

SVP est une instance de CVP avec $\vec{t} = 0$ et la restriction que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Problem (Closest Vector Problem)

Étant donnée une base B et un vecteur $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ qui minimise $\|\vec{v} - \vec{t}\|$.

[1] Il faut fixer la norme, par ex. la norme euclidienne/norme du supremum

Deux problèmes difficiles 1/2

Soit $\Lambda(B)$ un réseaux avec une base B. Le **minimum**[1] de $\Lambda(B)$ est défini par $\lambda_1(\Lambda(B)) = \min_{\vec{v}\in\Lambda(B)\setminus\{\vec{0}\}} \|\vec{v}\|$.

Problem (Shortest Vector Problem)

Étant donnée une base B, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ non nul tel que $\lambda_1(\Lambda(B)) = \|\vec{v}\|$.

SVP est une instance de CVP avec $\vec{t} = 0$ et la restriction que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

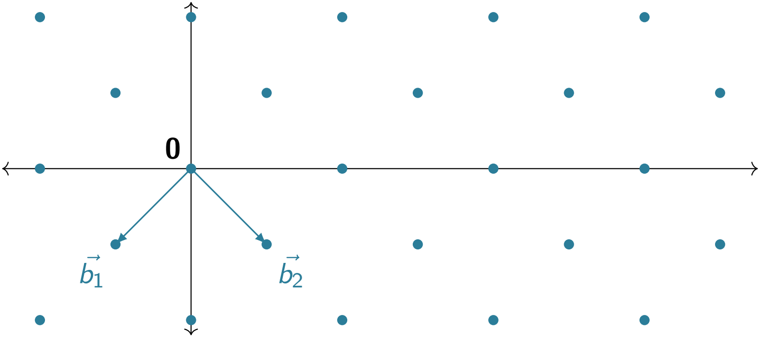
Problem (Closest Vector Problem)

Étant donnée une base B et un vecteur $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$, trouver $\vec{v} \in \Lambda(B)$ qui minimise $\|\vec{v} - \vec{t}\|$.

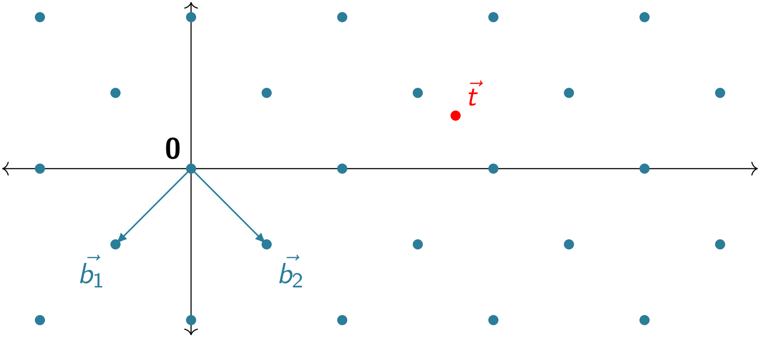
Les deux problèmes sont NP-difficile ($\hat{=}$ très difficile, à préciser).

[1] Il faut fixer la norme, par ex. la norme euclidienne/norme du supremum

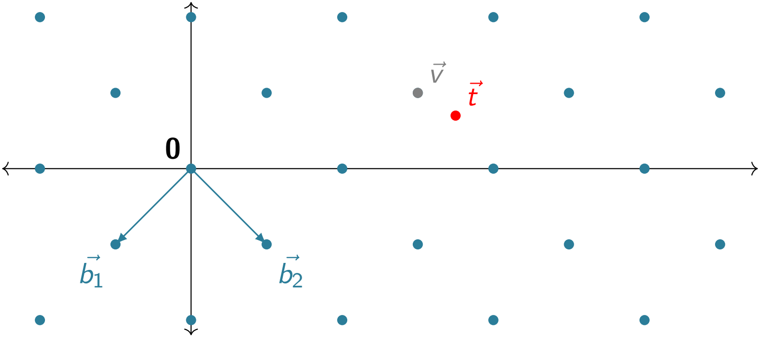
Deux problèmes difficiles 2/2



Deux problèmes difficiles 2/2



Deux problèmes difficiles 2/2



De quoi parlera cette présentation ?

Une réduction

Étant donnés deux problèmes, A et B.

Definition (informel)

Une **réduction** est un moyen de convertir un problème A en un autre problème B de telle sorte qu'une solution au problème B peut être utilisée pour résoudre le problème A.

Une réduction

Étant donnés deux problèmes, A et B.

Definition (informel)

Une **réduction** est un moyen de convertir un problème A en un autre problème B de telle sorte qu'une solution au problème B peut être utilisée pour résoudre le problème A.

On note $A \leq B$ ou $A \to B$.

Une réduction

Étant donnés deux problèmes, A et B.

Definition (informel)

Une **réduction** est un moyen de convertir un problème A en un autre problème B de telle sorte qu'une solution au problème B peut être utilisée pour résoudre le problème A.

On note $A \leq B$ ou $A \to B$.

La difficulté du problème A **induit** la difficulté de B.

Autrement dit, la difficulté du problème B **est basée** sur la difficulté du problème A.

Une réduction simple

Exemple

Nous savons additionner, soustraire et diviser par 2.

Problème $A \mathrel{\hat{=}}$ la multiplication
Problème $B \mathrel{\hat{=}}$ élever au carré.

Une réduction simple

Exemple

Nous savons additionner, soustraire et diviser par 2.

Problème $A \triangleq$ la multiplication
Problème $B \triangleq$ élever au carré.

Problème A peut être réduit au problème B :

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

Une réduction simple

Exemple

Nous savons additionner, soustraire et diviser par 2.

Problème $A \triangleq$ la multiplication
Problème $B \triangleq$ élever au carré.

Problème A peut être réduit au problème B :

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

En sens inverse, problème B peut être réduit au problème A :

$$a^2 = a \cdot a$$

Une réduction simple

Exemple

Nous savons additionner, soustraire et diviser par 2.

Problème $A \hat{=}$ la multiplication
Problème $B \hat{=}$ élever au carré.

Problème A peut être réduit au problème B :

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

En sens inverse, problème B peut être réduit au problème A :

$$a^2 = a \cdot a$$

$A \to B$ et $B \to A$, alors $A \leftrightarrow B$.

Cryptosystème de ElGamal

Paramètres: groupe cyclique $G = \langle g \rangle$ de l'ordre q

$m \in G, r \leftarrow_{\$} \{0, \ldots, q-1\}$

$\mathsf{sk} = x, \quad \mathsf{pk} = g^x$

$$\xrightarrow{c = (c_1, c_2) = (g^r, m \cdot \mathsf{pk}^r)}$$

L'hypothèse décisionnelle de Diffie-Hellman (DDH):

$$(g^a, g^b, g^{ab}) \approx (g^a, g^b, g^d)$$

Elle induit la difficulté de distinguer

$$(\mathsf{pk}, g^r, m \cdot \mathsf{pk}^r) \approx (\mathsf{pk}, g^r, m \cdot g^d)$$

Contexte actuel

- Compétition post-quantique du NIST[2]
  Processus de standardisation, lancé 02/2016,
  07/2020 : 7 candidats au troisième tour, dont 5 basé sur les réseaux

[2] National Institute of Standards and Technology

Contexte actuel

- Compétition post-quantique du NIST[2]
  Processus de standardisation, lancé 02/2016,
  07/2020 : 7 candidats au troisième tour, dont 5 basé sur les réseaux
- Recommandation à lire : [Pei16]
  Enquête sur une décennie de cryptographie à base de réseaux

[2] National Institute of Standards and Technology

Contexte actuel

- Compétition post-quantique du NIST[2]
  Processus de standardisation, lancé 02/2016,
  07/2020 : 7 candidats au troisième tour, dont 5 basé sur les réseaux
- Recommandation à lire : [Pei16]
  Enquête sur une décennie de cryptographie à base de réseaux
- Mon sujet : variantes structurées
  Efficacité versus sécurité
- On se revoit au deuxième semestre
  dans le cours Crypto

[2] National Institute of Standards and Technology

Questions ?

Images: `https://pxhere.com/en/photo/1369232`

Références

Diffie, Whitfield and Hellman, Martin. (1976)
On homomorphisms onto finite groups
IEEE transactions on Information Theory 22.6 644–654

Merkle, Ralph C. (1978)
Secure communications over insecure channels
Communications of the ACM 21(4) 294–299

Peikert, Chris. (2016)
A Decade of Lattice Cryptography
Foundations and Trends in Theoretical Computer Science 10(4) 283–424